

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Кафедра фізики

ЗАСТОСУВАННЯ ДЕЯКИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Магістерська робота
студентки 62 групи
фізико-математичного факультету

(спец.: «Фізика»)

Радчук Марини Петрівни

Науковий керівник:

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Грищук Віктор Валентинович

Житомир-2014

Анотація

Дипломний проект містить 43 сторінок, 2 розділи, висновки, список використаної літератури.

Встановлено вигляд диференціальних операторів та деяких кінематичних характеристик в декартовій, полярній, циліндричній та сферичній системах координат.

Зміст

I. Вступ.....	4
II. Теоретична частина.....	6
1.1 Криволінійні координати.....	6
1.2 Диференціальні векторні оператори.....	8
1.3 Спеціальні системи координат. Декартові координати.....	11
1.4 Сферичні координати.....	14
1.5 Кругові циліндричні координати.....	17
1.6 Еліптично циліндричні координати.....	21
1.7 Параболічно циліндричні координати.....	22
1.8 Полярні координати.....	24
III. Практична частина.....	27
II.1 Швидкість та прискорення в декартовій системі координат.....	27
II.2 Швидкість та прискорення в полярній системі координат.....	28
II.3 Швидкість та прискорення в циліндричній системі координат.....	29
II.4 Швидкість та прискорення в сферичній системі координат.....	31
II.5 Вигляд диференціальних операторів в різних системах координат.....	33
II.6 Розв'язок деяких задач.....	34
IV. Висновки.....	42
V. Список використаної літератури.....	43

Вступ

Координати на площині і в просторі можна вводити нескінченним числом різних способів. Розв'язуючи ту або іншу математичну або фізичну задачу методом координат, можна використовувати різні координатні системи, вибираючи ту з них, в якій завдання вирішується простіше або зручніше в даному конкретному випадку. Системи координат в геометрії — величини, що визначають положення точки на площині і в просторі. На площині положення точки найчастіше визначається відстанями від двох прямих (координатних осей), що перетинаються в одній точці (початку координат) під прямим кутом; одна з координат називається ординатою, а інша — абсцисою. У просторі за системою Декарта положення точки визначається відстанями від трьох площин координат, що перетинаються в одній точці під прямими кутами одна до одної, або сферичними координатами, де початок координат знаходиться в центрі сфери. Проте не всі фізичні завдання успішно вирішуються в декартовій системі. Наприклад, для центральних сил $F = r_0 F(r)$ (таких, як гравітаційні або електростатичні) декартові координати можуть виявитися вкрай незручними, тому користуються такою системою, в якій однією з координат служить відстань в радіальному напрямі.

Систему координат слід вибирати з умови якнайкращої відповідності поставленому завданню, використовуючи різні умови і симетрію, характерні для даної проблеми. Правильний вибір системи координат дозволяє швидше отримати рішення. Дуже часто слово «швидше» означає, що диференціальне рівняння з власними похідними в новій системі можна звести до диференціальних рівнянь першого порядку «стандартного» вигляду методом розділення змінних.

Таким чином, **актуальність теми** нашого дослідження зумовлена:

- обмеженим рівнем знань про різні типи систем координат та вибором тієї чи іншої системи координат;
- необхідністю вибору певної системи координат при розв'язуванні конкретної задачі;
- вигляд диференціальних операторів в різних системах

координат

Актуальність проблеми та її недостатня розробленість зумовили вибір теми дослідження: **«Застосування деяких ортогональних систем координат при розв'язуванні задач».**

Мета даної роботи - показати застосування ортогональних систем координат при розв'язуванні фізичних задач, зокрема, який вигляд набувають диференціальні оператори в різних системах координат, а також швидкість і прискорення рухомої матеріальної точки.

Об'єкт дослідження - задачі з теоретичної фізики, де застосовується ортогональні системи координат.

Предмет дослідження - ортогональні системи координат

Відповідно до предмета та мети визначено основні **завдання даної роботи:**

1. зібрати матеріал по системах координат, який можна використовувати у теоретичній фізиці;
2. отримати швидкість та прискорення в декартовій, полярній, циліндричній та сферичній системах координат;
3. навести приклади розв'язування задач в різних системах координат.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.

1.1 Криволінійні координати

Система координат — спосіб задання точок простору за допомогою чисел. Кількість чисел, необхідних для однозначного визначення будь-якої точки простору, визначає його вимірність. Обов'язковим елементом системи координат є початок координат - точка, від якої ведеться відлік відстаней. Іншим обов'язковим елементом є одиниця довжини, яка дозволяє відраховувати відстані. Всі точки одновимірного простору можна задати при обраному початку координат одним числом. Для двовимірного простору необхідні два числа, для тривимірного — три. Ці числа називаються координатами. Координати на площині і в тривимірному просторі можна задавати нескінченним числом різних способів. Розв'язуючи ту або іншу математичну або фізичну задачу методом координат, можна використовувати різні координатні системи, вибираючи ту з них, в якій завдання розв'язується простіше або зручніше в даному конкретному випадку.

Розвиток систем координат в історії людства пов'язаний як з математичними задачами, так і з практичними проблемами мистецтва навігації, що спиралася на картографію та астрономію. Найвідомішу систему координат, прямокутну, запропонував Рене Декарт у 1637 році. Поняття про полярну систему координат у європейській математиці склалося приблизно в ці ж часи, але перші уявлення про неї існували ще в Стародавній Греції, у в середньовічних арабських математиків, які розробляли методи обрахунку напрямку на Каабу.

Декартові координати утворюються трьома сімействами взаємно перпендикулярних площин: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, і $z = \text{const}$. Уявимо собі, що ми наклали на цю систему три інших сімейства поверхонь. Поверхні будь-якого з цих сімейств не паралельні один одному, і, крім того, вони не повинні бути

площинами. Всі три нові сімейства поверхонь не повинні бути взаємно перпендикулярними, проте для простоти ми опустимо цю умову. Положення будь-якої точки (x, y, z) можна задати перетином трьох площин в декартовій системі чи перетином трьох поверхонь, які утворюють нову систему криволінійних координат. Вважаючи поверхні криволінійних координат $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$ і $q_3 = \text{const}$, ми тим самим фіксуємо положення заданої точки координатами (q_1, q_2, q_3) так само, як і координатами (x, y, z) . Це означає, що в принципі можна записати

$$x=x(q_1, q_2, q_3), \quad y=y(q_1, q_2, q_3), \quad z=z(q_1, q_2, q_3), \quad (1.1)$$

де x, y і z задані через нові координати q . Можлива і зворотна залежність:

$$(1.2)$$

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

Кожному сімейству поверхонь $q_i = \text{const}$ можна поставити у відповідність одиничний вектор a_i нормальний до поверхні $q_i = \text{const}$ направлений у бік зростання q_i .

Квадрат відстані між двома точками обчислюється за формулою

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2 dq_i dq_j \quad (1.3)$$

Коефіцієнти h_{ij}^2 називають коефіцієнтами Ламе; їх можна розглядати як якісь параметри, що характеризують задану систему координат q_1, q_2, q_3 .

Сукупність коефіцієнтів Ламе визначає метрику системи координат.

Щоб визначити h_{ij}^2 про диференціюємо рівняння (1.1)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \quad (1.4)$$

Аналогічні співвідношення виходить для dy і dz . Зводячи (1.4) до квадрату і підставляючи потім в (1.3), отримуємо

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j}. \quad (1.5)$$

Обмежимося ортогональними системами координат (взаємно перпендикулярні поверхні); математично це означає, що

$$h_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (1.6)$$

Щоб спростити позначення, покладемо $h_{ij} = h_i$, тоді

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (1.7)$$

У наступних розділах кожна система координат визначатиметься завданням коефіцієнтів Ламе h_1, h_2, h_3 . І навпаки, для будь-якого заданого ds вважаючи решту q постійними, ці величини зручно визначати за допомогою співвідношення $ds_i = h_i dq_i$ (1.8)

Підкреслимо, що криволінійні координати q_1, q_2, q_3 безрозмірні. Коефіцієнти Ламе h_i можуть залежати від q і можуть мати розмірність. Добуток $h_i dq_i$ може мати розмірність довжини.

Із співвідношення (1.8) виходять елементи поверхні і об'єму

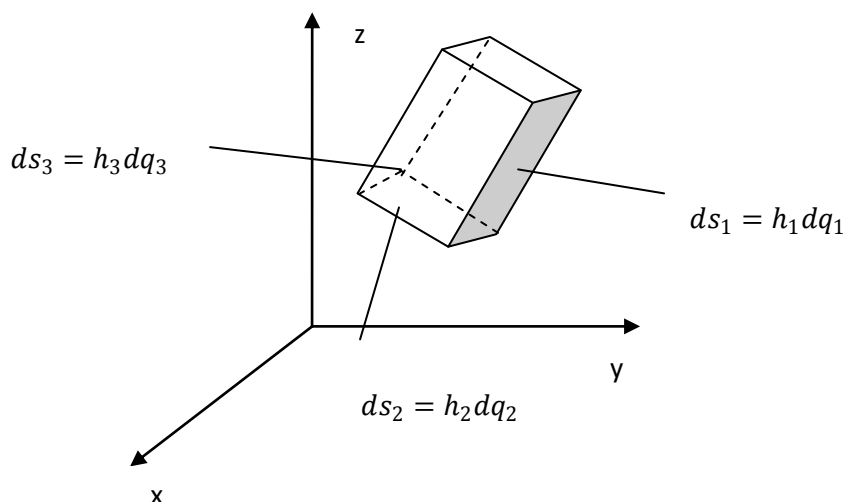
$$d\sigma_i = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \quad (1.9)$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (1.10)$$

Вирази (1.9) і (1.10) повністю узгоджуються із законом перетворення (1.1).

1.2 Диференціальні векторні оператори

В основу розгляду операторів градієнта, дивергенції і ротора в криволінійних координатах ми покладемо визначення градієнта деякої функції як вектора: що має абсолютну величину і напрям максимальний швидкості зміни цієї функції в просторі



Мал.1.1. криволінійний елемент об'єму

Тоді компоненту $\nabla \psi(q_1, q_2, q_3)$ у напрямі, нормальному до сімейства поверхонь $q_1 = \text{const}$, задається у вигляді

$$\nabla \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{\partial \psi}{h_1 \partial q_1}, \quad (1.11)$$

Оскільки вона характеризує швидкість зміни Ψ при зміні q_1 (q_2, q_3) фіксовані.

Величина ds_1 – приріст довжини у напрямі збільшення q_1 був введений вектор a_1 для задання цього напрямку. Для змінних q_1 і q_3 отримаємо вираз (1.11); векторно склавши їх, представимо градієнт у вигляді

$$\nabla \psi(q_1, q_2, q_3) = a_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + a_3 \frac{\partial \psi}{\partial s_3} = a_1 \frac{\partial \psi}{h_1 \partial q_1} + a_2 \frac{\partial \psi}{h_2 \partial q_2} + a_3 \frac{\partial \psi}{h_3 \partial q_3}. \quad (1.12)$$

Оператора дивергенції можна отримати, використовуючи попередні рівняння що еквівалентно, теоремі Гауса.

$$\nabla \cdot V(q_1, q_2, q_3) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int V \cdot d\sigma}{\int d\tau} \quad (1.13)$$

Де за елементи об'єму взятий добуток $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$. Додатні напрямки вибрані так, що $q_1 q_2 q_3$ або $a_1 a_2 a_3$ утворюють праву систему (мал. 1.1).

Як і в попередньому, інтеграція по двох поверхнях $q_1 = \text{const}$ дає:

$$\left[V_1 q_1 q_2 q_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3 - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (1.14)$$

Додаючи аналогічні результати для двох інших пар поверхонь, отримуємо

$$\int V(q_1, q_2, q_3) \cdot \partial \sigma = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3 \quad (1.15)$$

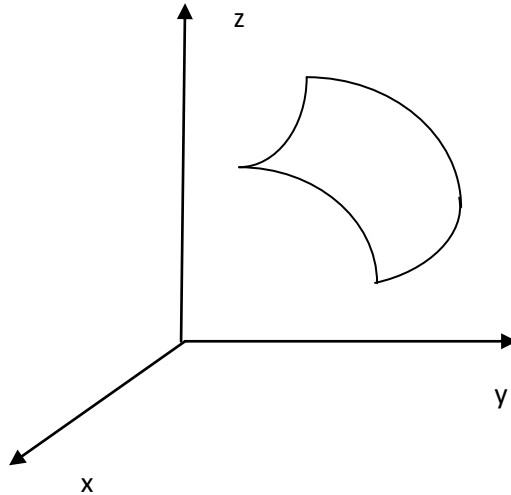
Або після ділення на елементарний об'єм

$$\nabla \cdot \vec{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \quad (1.16)$$

Враховуючи все, отримуємо Лапласіан

$$\nabla \cdot \nabla \psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.17a)$$

Нарешті, за допомогою теореми Стокса випишемо в явному виду $\nabla \times V$ і перейдемо до межі, спрямувавши до нуля площу поверхні. Розглянемо диференціальний елемент поверхні на криволінійних поверхні



Мал. 1.2 цей елемент відмічений цифрами 1, 2, 3, 4).

$$\int \nabla \times V \cdot \partial \sigma = \nabla \times V|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (1.17b)$$

Згідно теореми Сокса

$$\nabla \times V|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint V \cdot d\lambda \quad (1.18)$$

Тут лінійний інтеграл взятий по контуру, лежачому на поверхні $q_1 = const$.

Переходячи послідовно вздовж ділянок 1,2,3,4 межі мал.(1.2), отримуємо

$$\begin{aligned} \oint V(q_1, q_2, q_3) d\lambda &= V_2 h_2 dq_2 + \left[V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) dq_2 \right] dq_3 - \left[V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) dq_3 \right] dq_2 - V_3 h_3 dq_3 = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right] dq_2 dq_3 \end{aligned}$$

На ділянках 3 і 4 взятий знак мінус, оскільки в другому випадку обхід здійснюється у відємному напрямі. З (1.18) отримуємо

$$\nabla \times V|_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right] \quad (1.20)$$

Останні дві компоненти можна отримати циклічною перестановкою індексів.

Як вже наголошувалося, часто зручно записувати ротор у вигляді визначника

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 h_1 & \bar{a}_2 h_2 & \bar{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

На цьому завершується визначення операторів ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ і лапласіана ∇^2 в системі криволінійних координат.

1.3. Спеціальні системи координат. Декортові (прямокутні) координати

Як вже наголошувалося, вибір системи координат може залежати від фізичної природи і симетрії вирішуваної проблеми. Корисно перерахувати всі 14 систем, класифікуючи їх відповідно до того, чи володіють вони віссю зміщення (перпендикулярною сімейству паралельних площин), або віссю симетрії обертання.

У табл. 1 перераховано 15 систем координат, оскільки кругові циліндричні координати володіють і віссю

Таблиця 1

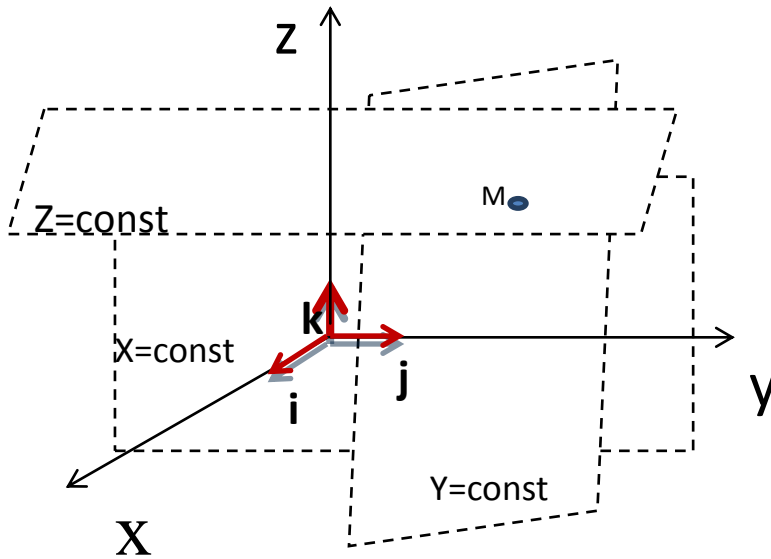
Вісь зміщення	Вісь обертання	Системи, що не мають осей
Декартові (3 осі)	—	Софокусного еліпсоїда
Кругові циліндричні	Кругові	—
—	циліндричні	—
—	Сферичні (3 осі)	—
Еліптично циліндричні	Витягнутого сфероїда	—
—	Сплюснутого сфероїда	—
Параболічно циліндричні	Параболічні	—
Біполярні	Тороїдальні	—
—	Бісферичні	Конічні
	—	Координати софокусного параболоїда

зміщення, і віссю обертання, а тому наведені двічі. Розташовані системи в таблиці так, щоб показати зв'язок між різними координатами. В результаті обертання двовимірної ($z = 0$) системи з віссю зміщення (ліва колонка) навколо осі симетрії отримаємо систему координат, наведену в центральній колонці таблиці. Наприклад, обертаючи площину ($z = 0$) еліптично циліндричні системи координат навколо великої (малою) осі, отримуємо систему витягнутого (сплюснутого) сфероїда. У третій колонці включено три системи координат, у яких немає ні осей зміщення, ні осей обертання.

Відмітимо, що в цій асиметричній групі приведена система софокусних еліпсоїдів, яка в деякому розумінні є найбільш загальною, і решту майже всіх систем можна отримати з неї.

Декартові координати. У декартовій системі координат, найпростішій із усіх систем

$$h_1 = h_x = 1, h_2 = h_y = 1, h_3 = h_z = 1. \quad (1.22)$$



Сімействами координатних поверхонь є три набори паралельних площин: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Декартова система - єдина, в якій всі коефіцієнти Ламе h_i постійні. Ця обставина буде особливо важливою при розгляді тензорів в розділі 3. Підкреслимо, що напрям одиничних векторів a_1 , a_2 , a_3 або i , j , k фіксовано.

Виходячи з рівнянь (1.13), (1.17), (1.18) і (1.22) можна отримати результати:

$$\nabla \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + j \frac{\partial \Psi}{\partial y} + k \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

1.4 Сферичні координати r, θ, φ

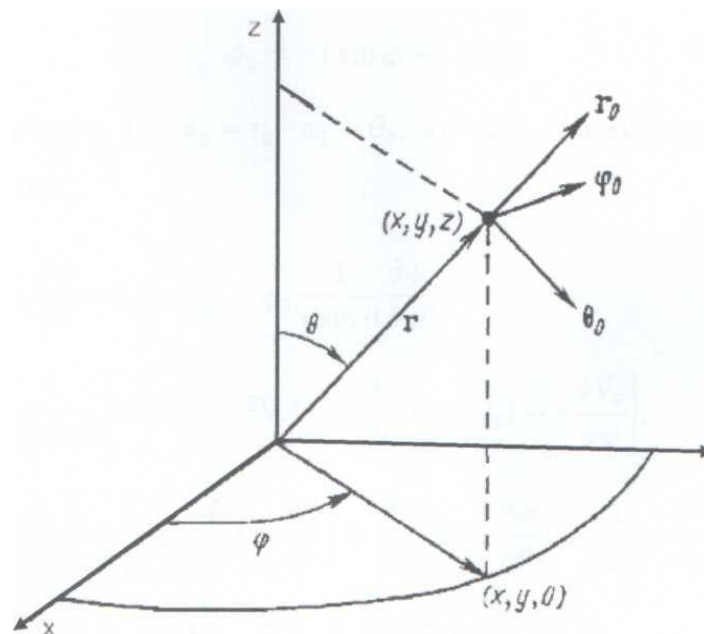
Позначаючи q_1, q_2, q_3 буквами r, θ, φ можна вказати основні сімейства поверхонь сферичної системи координат.

1. Концентричні сфери із загальним центром на початку координат: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const}$

2. Концентричні поверхні прямих кругових конусів з полярною віссю зі вершинами на початку координат:

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const}$$

3. Півплощини, що проходять через вісь z : $(\varphi = \arctg(y/x) = \text{const})$.
Через довільний вибір полярного кута θ і азимутального кута φ всі прив'язки проводять відносно осі



Мал. 1.1. Сферичні полярні координати.

Рівняння перетворення координат, відповідні рівнянням (2.2), мають вигляд

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.27)$$

Тут θ відлічують від додатного напрямку осі z , а φ в площині xy від додатнього напрямку осі x (мал. 1.1). Введені координати змінюються в межах $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. З рівняння (1.6)

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r \sin \theta \quad (1.28)$$

Слід підкреслити, що одиничні вектори r_0, θ_0, φ_0 міняють напрям, який визначений кутами θ і φ .

Ці одиничні вектори виражаються через фіксовані одиничні вектори декартової системи координат i, j, k :

$$r_0 = i \sin \theta \cos \varphi + j \sin \theta \sin \varphi + k \cos \theta,$$

$$\theta_0 = i \sin \theta \cos \varphi + j \cos \theta \sin \varphi - k \sin \theta,$$

$$\varphi_0 = -i \sin \varphi + j \cos \varphi.$$

Вважаючи в розд. 1.2 $a_1 = r_0, a_2 = \theta_0, a_3 = \varphi_0$, отримуємо основні співвідношення

$$\nabla \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \varphi_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], \quad (1.31)$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.32)$$

Іноді потрібно записати векторний лапласіан $\nabla^2 \nabla$ в сферичних координатах. Це можна зробити за допомогою векторної тотожності:

$$\begin{aligned}\nabla^2 V_r &= \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) V_r + \\ &+ \left(-\frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) V_\theta + \left(-\frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) V_\varphi = \\ &= \nabla^2 V_r - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 V_\theta &= \nabla^2 V_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\theta + \frac{2 \partial V_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi},\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\nabla^2 V_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \quad (1.35)$$

Приклад 1. Використовуючи рівняння (1.29) і (1.22) можна перевірити деякі результати, отримані в декартових координатах. З рівняння (1.29)

$$\nabla f(r) = r_0 \frac{df}{dr}, \nabla r^n = r_0 n r^{n-1} \quad (1.36)$$

З рівняння (1.20)

$$\nabla \cdot r_0 f(r) = \frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr}, \nabla \cdot r_0 r^n = (n+2) r^{n-1}. \quad (1.37)$$

З рівняння (1.21)

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r} \cdot \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}, \nabla^2 r^n = n + (n+1) r^{n-2}, \quad (1.38)$$

нарешті, з (1.22)

$$\nabla \times r_0 f(r) = 0 \quad (1.39)$$

Приклад 2. Обчислення магнітного векторного потенціалу кругового струму в площині $x\varphi$ пов'язане з визначенням вектора

$$\mathbf{V} = \nabla \times [\nabla \times \varphi_0 \mathbf{A}_\varphi(r, \varphi)] \quad (1.40)$$

В сферичних координатах

$$\mathbf{V} = \nabla \times \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \theta \mathbf{A}_\varphi(r, \theta) \end{vmatrix} = \nabla \times \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r_0 \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \mathbf{A}_\varphi) - r\theta_0 \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \mathbf{A}_\varphi) \right], \quad (1.40a)$$

або

$$\mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \mathbf{A}_\varphi) & -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \mathbf{A}_\varphi) & 0 \end{vmatrix} \quad (1.40b)$$

Розкладаючи (1.40) по першому рядку, маємо

$$\mathbf{V} = -\varphi_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathbf{A}_\varphi) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \theta \mathbf{A}_\varphi) \right] \right\} = -\varphi_0 \left[\nabla^2 \mathbf{A}_\varphi(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{A}_\varphi(r, \theta) \right].$$

У подальшому ми покажемо, що вектор \mathbf{V} пов'язаний з приєднаним рівнянням Лежандра, а можна представити у вигляді ряду по приєднаних поліномах Лежандр

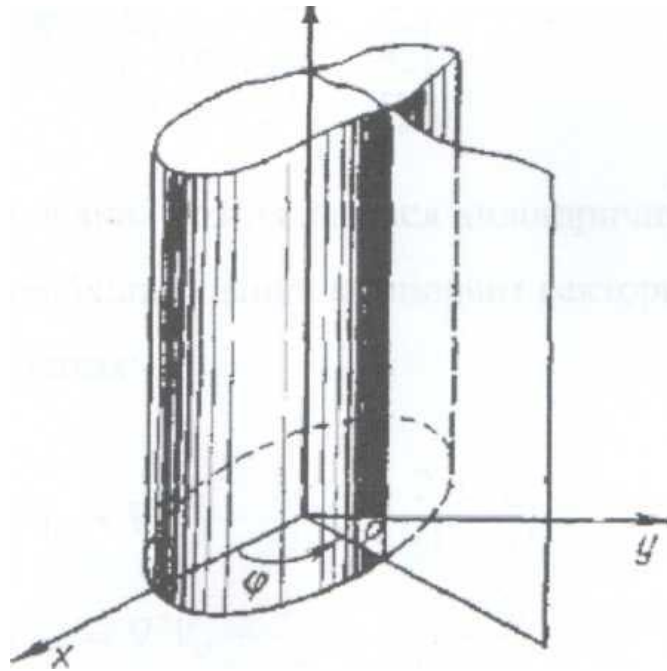
1.5 Кругові циліндричні координати ρ, φ, z

Легко отримати співвідношення, які визначають зв'язок між декартовими і

круговими циліндричними координатами (мал. 1.5):

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \quad (1.41)$$

де ρ - відстань по нормалі від осі z , а φ як і раніше позначає відстань від початку відліку в декартовій системі. Відповідно до цих формул коефіцієнти Ламе виявляються рівними



Мал. 1.5. Кругові циліндричні координати

$$h_x = h_y = 1, h_r = h_\varphi = \rho, h_z = 1. \quad (1.42)$$

Ця система координат утворена наступними сімействами координатних поверхонь на мал. 1.5:

1) правильні кругові циліндри з віссю z як загальна вісь:

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const};$$

2) півплощини, що проходять через вісь z :

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \text{const}$$

3) площини, паралельні площині xy : $z = \text{const}$. Змінні ρ, φ, z змінюються в

межах $0 \leq \rho < 2\pi, -\infty < z < \infty$.

$$\nabla \psi(\rho, \varphi, z) = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \varphi_0 \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + k \frac{\partial \psi}{\partial z}, (1.43)$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, (1.44)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, (1.45)$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho \varphi_0 & k \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}. (1.46)$$

Нарешті, для задач, в яких розглядаються циліндричні хвилеводи або об'ємні резонатори, необхідне знання компонент векторного лапласіана $\nabla^2 V$ в циліндричних координатах

$$\begin{cases} \nabla^2 V|_\rho = \nabla^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2} V_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 V|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2} V_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 V|_z = \nabla^2 V_z \end{cases} (1.47)$$

Вигляд z - компоненти лапласіана визначається тим, що вісь z в декартовій і циліндричній системі співпадає, тобто

$$\nabla^2(\rho_0 V_\rho + \varphi_0 V_\varphi + k V_z) = \nabla^2(\rho_0 V_\rho + \varphi_0 V_\varphi) + k \nabla^2 V_z = \rho_0 f(V_\rho V_\varphi) + \varphi_0 g(V_\rho, V_\varphi) + k \nabla^2 V_z$$

Оператор ∇^2 діє на одиничні вектори ρ_0, φ_0 , лежачі в площині $\rho_0 \varphi_0$. Ця властивість оператора розповсюджується на будь-які циліндричні системи.

Приклад. Просторова частина амплітуди електромагнітної хвилі в циліндричному хвилеводі підкоряється хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Хвильовід з абсолютно провідними стінками не ослабляє хвилю, а тому немає залежності від z (центральна вісь хвилеводу співпадає з віссю z). Тоді, використовуючи вираз (1.34), отримуємо

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0. (1.48)$$

Нехай

$$\psi(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi), (1.49)$$

Тоді

$$\frac{1}{P\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi\rho^2} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0. (1.50)$$

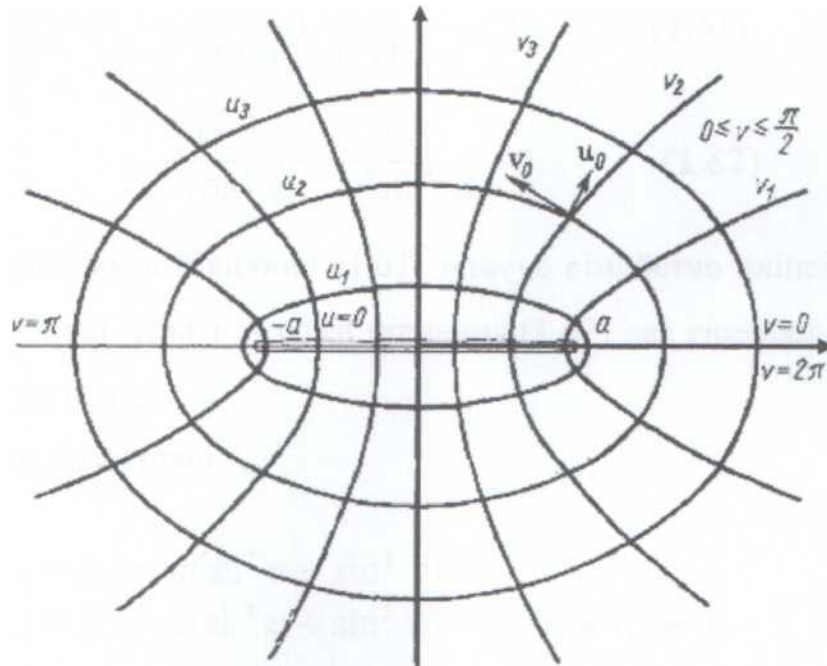
Помноживши (1.50) на ρ^2 , виділяємо член, залежний тільки від φ :

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

Тут постійна рівна $-m^2$, оскільки φ - азимутальний кут, і очікуване рішення повинне мати залежність $\sin m\varphi$ або $\cos m\varphi$. Рівняння для радіальної частини є рівнянням Бесселя:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) P = 0. (1.51)$$

1.6 Еліптично циліндричні координати u, v, z



Мал. 1.6. Еліптично циліндричні координати

Логічно почати класифікацію систем координат, що допускають розділення змінних, з софокусної еліпсоїдальної системи, а всі останні розглядати як її окремі випадки. Розглядатимемо властивості симетрії систем координат, які обумовлюються віссю зміщення.

Для еліптично циліндричної системи маємо

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = z. \quad (1.52)$$

Софокусну еліпсоїдальну систему утворюють наступні сімейства координатних поверхонь (мал. 1.6):

- 1) еліптичні циліндри: $u = \text{const}, 0 \leq u < \infty$
- 2) гіперболічні циліндри: $v = \text{const}, 0 \leq v \leq 2\pi$
- 3) площини, паралельні площині xy : $z = \text{const}, -\infty < z < \infty$

Підносячи до квадрату формулу (1.53), отримуємо

$$x^2 = a^2 ch^2 u \cos^2 v \quad (1.54)$$

$$y^2 = a^2 sh^2 u \sin^2 v \quad (1.55)$$

Звідки

$$\frac{x^2}{a^2 ch^2 u} + \frac{y^2}{a^2 sh^2 u} = 1 \quad (1.56)$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1 \quad (1.57)$$

При фіксованому u рівняння (1.54) описує сімейство еліпсів з віссю X в якості головної осі. При $v = \text{const}$ рівняння (1.55) дає гіперболи з фокусами, розташованими по осі x .

Коефіцієнти Ламе рівні

$$h_1 = h_u = a(sh^2 u + \sin^2 v)^{\frac{1}{2}} \quad (1.58)$$

$$h_2 = h_v = a(sh^2 u + \sin^2 v)^{\frac{1}{2}}$$

$$h_3 = h_z = 1$$

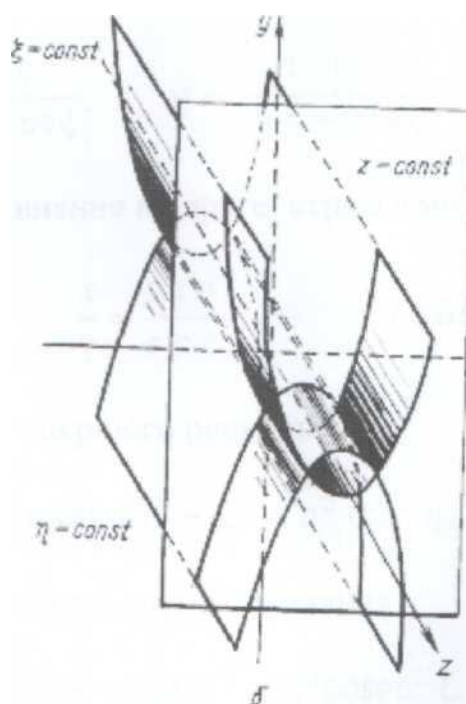
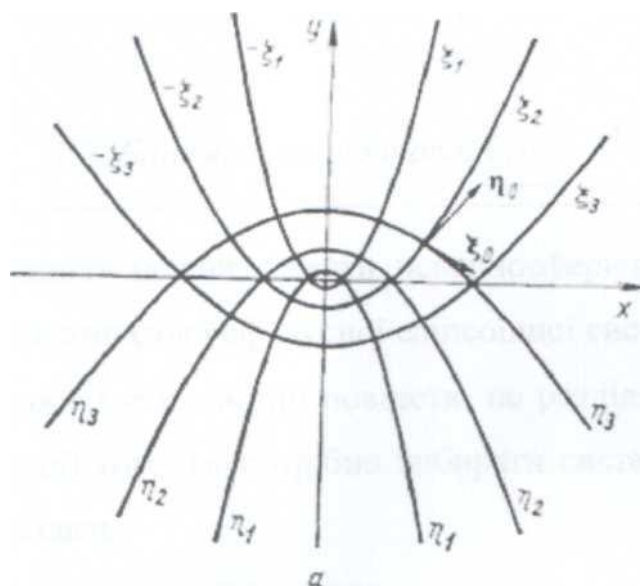
1.7 Параболічно циліндричні координати ξ, η, z

Формули перетворення

$$x = \xi \eta, y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), z = z \quad (1.59)$$

описують дві системи ортогональних параболічних циліндрів (мал. 1.7).

Розв'язавши рівняння (1.64) відносно (i, j) отримаємо сімейства цих поверхонь:



Мал. 1.7. Параболічно циліндричні координати (а) і їх аксонометрія (б).

1. параболічні циліндри: $\xi = \text{const}$, $0 \leq \xi < \infty$
2. параболічні циліндри: $\eta = \text{const}$, $0 \leq \eta < \infty$;
3. площини, паралельні площині xy : $z = \text{const}$, $z = \text{const}$, $-\infty < z < \infty$.

З рівнянь (2.6) знаходимо коефіцієнти Ламе

$$h_1 = h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, (1.60)$$

$$h_2 = h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, (1.61)$$

$$h_3 = h_z = 1, (1.62)$$

1.8. Полярна система координат

Полярна система координат - двовимірна система координат , в якій кожна точка на площині визначається двома числами - полярним кутом і полярним радіусом . Полярна система координат особливо корисна у випадках , коли відносно між точками простіше зобразити у вигляді радіусів і кутів ; в більш поширеній , декартовій або прямокутній системі координат , такі відношення можна встановити тільки шляхом застосування тригонометричних рівнянь . Полярна система координат задається променем , який називають нульовим або полярною віссю . Точка , з якої виходить цей промінь , називається початком координат або полюсом. Будь точка на площині визначається двома полярними координатами : радіальною і кутовою. Радіальна координата (зазвичай позначається r) відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата , також називається полярним кутом або азимутом і позначається φ , дорівнює розі , на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для того , щоб потрапити в цю точку . Визначена таким чином радіальна координата може приймати значення від нуля до нескінченності , а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360° .

Однак , для зручності область значень полярної координати можна розширити за межі повного кута , а також дозволити їй брати негативні значення , що відповідає повороту полярної осі за годинниковою стрілкою.

Кожна точка в полярній системі координат може бути визначена двома полярними координатами , що зазвичай називаються r (радіальна координата) і φ (кутова координата , полярний кут , азимут , іноді пишуть θ або t) . Координата r відповідає відстані до полюса , а координата φ дорівнює куту в напрямку проти годинникової стрілки від променя через 0° (іноді називається полярною віссю) .

Полярний радіус визначений для будь-якої точки площини і приймає невід'ємні значення $r \geq 0$. Полярний кут φ визначений для будь-якої точки площини , за винятком полюса O , і приймає значення $-\pi < \varphi \leq \pi$. Полярний кут вимірюється в радіанах і відраховується від полярної осі:

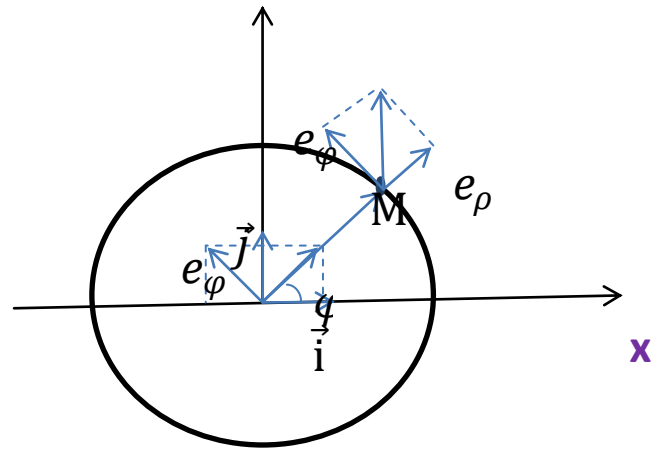
- в позитивному напрямі (проти напрямку руху годинникової стрілки) , якщо значення кута позитивне ;
- в негативному (за напрямком руху годинникової стрілки) , якщо значення кута негативне.

Однією з важливих особливостей полярної системи координат є те , що одна і та ж точка може бути представлена нескінченною кількістю способів . Це відбувається тому , що для визначення азимута точки потрібно повернути полярну вісь так , щоб він вказував на точку. Але напрям на точку не зміниться , якщо здійснити довільне число додаткових повних обертів. Зв'язок між декартовими і полярними координатами. Пару полярних координат r і φ можна перевести в Декартові координати x і y шляхом застосування тригонометричних функцій синуса і косинуса:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad (1.63)$$

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$$



Розділ 2. Практична частина

II.1 Швидкість та прискорення в декартовій системі координат

Положення точки М в просторі можна однозначно визначити трьома її декартовими координатами x, y, z

Рух точки М вважається заданим, якщо вказані координати представлені як функції по часу, тобто

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2.1)$$

Відзначимо, що такий спосіб задання руху матеріальної точки еквівалентний закону

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t) \quad (2.2)$$

Де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – постійні орти координатних осей Ox, Oy, Oz .

Рівняння (2.1) можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки

М, якщо з них виключити час t , то можна отримати рівняння траєкторії в явному вигляді.

Диференціюючи радіус-вектор (2.2) за часом, знаходимо швидкість і прискорення точки М у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} \quad (2.3)$$

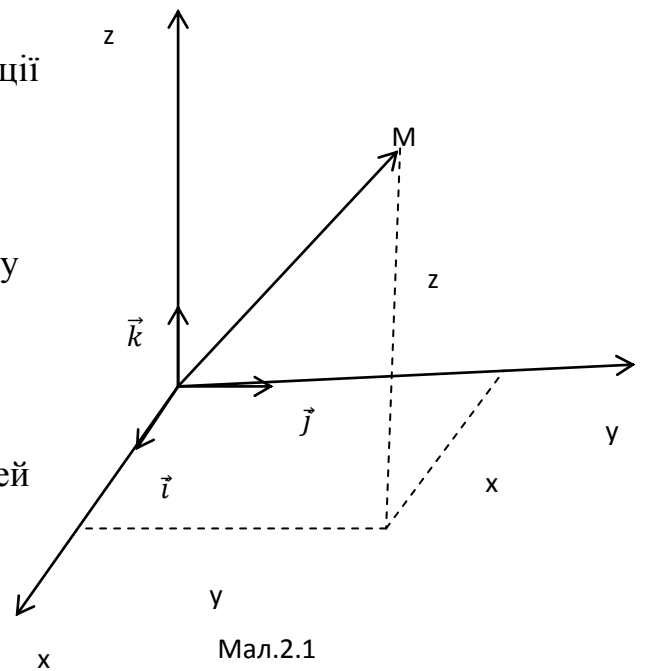
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} \quad (2.4)$$

Звідси видно, що проекції швидкості і прискорення точки на осі декартової системи координат рівні:

$$\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y, \dot{z} = v_z \quad (2.5)$$

$$\ddot{x} = a_x, \ddot{y} = a_y, \ddot{z} = a_z \quad (2.6)$$

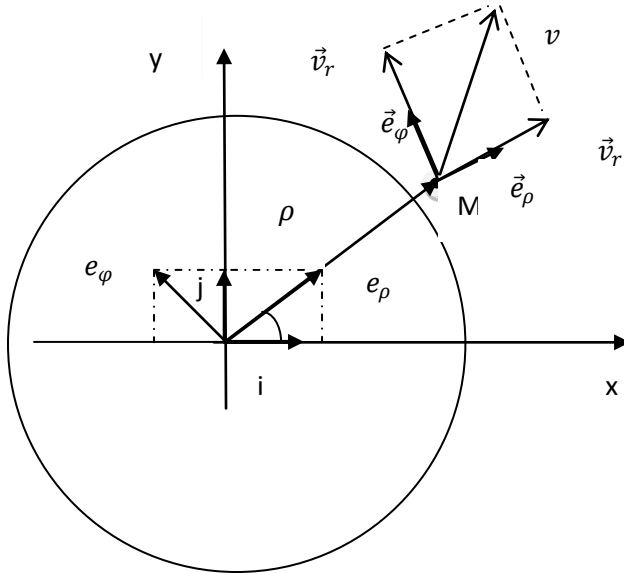
І, отже



$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (2.7)$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (2.8)$$

П.2 Швидкість та прискорення в полярній системі координат



Мал..2.2

Положення точки М в просторі можна задати однозначно визначеними двома її полярними координатами.

Полярні координати і точки М пов'язані з її декартовими координатними формулами:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j} \quad (2.9)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$$

Диференціюючи радіус-вектор точки і враховуючи (2.9), знаходимо

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho \frac{d}{dt}(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}) = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho(-\vec{i}\sin\varphi \dot{\varphi} + \vec{j}\cos\varphi \dot{\varphi}) =$$

$$= \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho\dot{\varphi}(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi) = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (2.10)$$

\dot{r} – радіальна швидкість

$r\dot{\phi}$ – азимутальна, тангенціальна

$$\vartheta_\rho = \dot{\rho}\vartheta_\varphi = \rho\dot{\phi} \quad (2.11)$$

$$\vartheta = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2} \quad (2.12)$$

Вектор прискорення матеріальної точки можна представити у вигляді

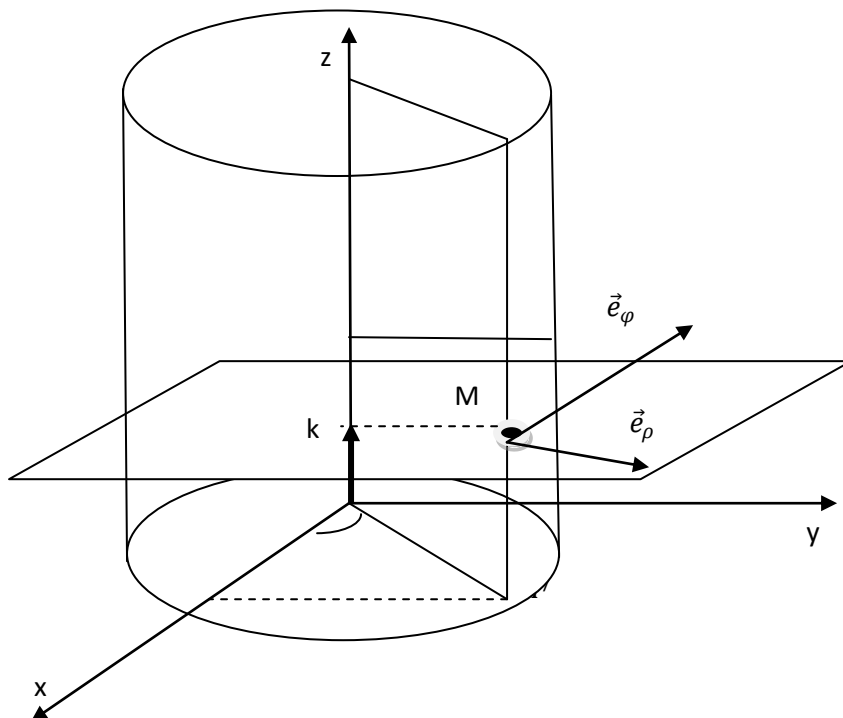
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\varphi + \rho(\ddot{\phi}\vec{e}_\varphi + \dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\varphi)$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e}_r + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho(-\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi) + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$+ \rho\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\varphi(-\vec{i}\cos\phi - \vec{j}\sin\phi) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\varphi \quad (2.13)$$

$$|a| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})^2} \quad (2.14)$$

II.3 Швидкість та прискорення в циліндричній системі координат



В циліндричних координатах положення точки М в просторі визначається за допомогою скалярних функцій $\rho(t), \varphi(t), z(t)$, при цьому радіус-вектор точки можна представити у вигляді

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad , \quad q_3 = z \quad (2.15)$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_\rho, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_\varphi, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_z \quad (2.16)$$

Циліндричні координати ρ, φ , і z точки М пов'язані з її декартовими координатами формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.17)$$

а зв'язок між ортами і визначається співвідношеннями:

$$\vec{e}_\rho = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi \quad (2.18)$$

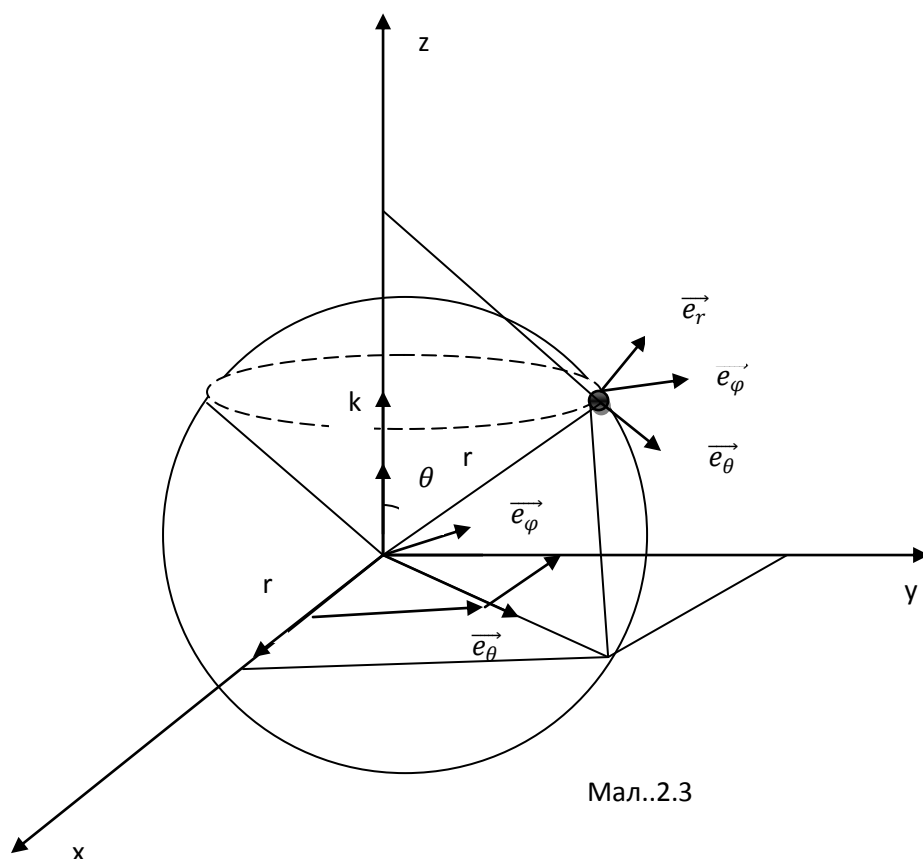
$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

Диференціюючи радіус вектор точки знаходимо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho + \vec{k}z) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{k} = (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) + \dot{z} \vec{k} \quad (2.19)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{k} \quad (2.20)$$

II.4 Швидкість та прискорення в сферичній системі координат



Мал..2.3

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.21)$$

В сферичних координатах закон руху матеріальної точки М визначається рівняннями, зв'язок між сферичними і декартовими координатами встановлюється формулами:

$$\vec{e}_r = \vec{i} \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} \cos \theta$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{i} \cos \theta \cos \varphi + \vec{j} \cos \theta \sin \varphi - \vec{k} \sin \theta \quad (2.22)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$$

Диференціюючи радіус-вектор з урахуванням співвідношень знаходимо:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r - \dot{r}\vec{e}_r + r(\vec{i}\cos\theta \cdot \dot{\theta}\cos\varphi - \vec{i}\sin\theta \cdot \sin\varphi\dot{\varphi}) + \\
&+ (\vec{j}\cos\theta\dot{\varphi} + \vec{j}\sin\theta\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) - \vec{k}\sin\theta \cdot \dot{\theta}] = \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}(\vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta) + r\dot{\varphi}(-\vec{i}\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}\sin\theta\cos\varphi) = \\
&\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \quad (2.24)$$

II.5 Вигляд диференціальних операторів в різних системах координат

1. Градієнт, дивергенція, ротор для декартових координат

$$\nabla\Psi(q_1, q_2, q_3) = a_1 \frac{\partial\Psi}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial\Psi}{\partial s_2} + a_3 \frac{\partial\Psi}{\partial s_3} = a_1 \frac{\partial\Psi}{h_1\partial q_1} + a_2 \frac{\partial\Psi}{h_2\partial q_2} + a_3 \frac{\partial\Psi}{h_3\partial q_3} \quad (2.27)$$

Коефіцієнти Ламе рівні $h_1 = h_x = 1$, $h_2 = h_y = 1$, $h_3 = h_z = 1$.

$a_1 = i, a_2 = j, a_3 = k$. $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$. Підставивши в рівняння для градієнта отримаємо

$$\nabla\Psi = i \frac{\partial\Psi}{\partial x} + j \frac{\partial\Psi}{\partial y} + k \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot V(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \quad (2.29)$$

Де V_i - проекція V на напрям a_i , тобто $V_i = a_i \cdot V$, тоді

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} a_1 h_1 & a_2 h_2 & a_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

2. Градієнт, дивергенція, ротор для сферичних координат

$$\nabla \Psi(q_1, q_2, q_3) = a_1 \frac{\partial \Psi}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{\partial s_2} + a_3 \frac{\partial \Psi}{\partial s_3} = a_1 \frac{\partial \Psi}{h_1 \partial q_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{h_2 \partial q_2} + a_3 \frac{\partial \Psi}{h_3 \partial q_3}$$

Коефіцієнти Ламе рівні $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$, $h_3 = h_\varphi = r \sin \theta$. $a_1 = r_0$, $a_2 = \theta_0$, $a_3 = \varphi_0$. $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$. Підставивши в рівняння для градієнта отримаємо

$$\nabla \Psi = r_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \varphi_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot V(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.35)$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} a_1 h_1 & a_2 h_2 & a_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r \theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & r V_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

3. Градієнт, дивергенція, ротор для циліндричних координат

$$\nabla \Psi(q_1, q_2, q_3) = a_1 \frac{\partial \Psi}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{\partial s_2} + a_3 \frac{\partial \Psi}{\partial s_3} = a_1 \frac{\partial \Psi}{h_1 \partial q_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{h_2 \partial q_2} + a_3 \frac{\partial \Psi}{h_3 \partial q_3}$$

Коефіцієнти Ламе рівні $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\varphi = \rho$, $h_3 = h_z = 1$. $a_1 = \rho_0$, $a_2 = \varphi_0$, $a_3 = k$. $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Підставивши в рівняння для градієнта отримаємо

$$\nabla \Psi = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \varphi_0 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + k \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot V(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (2.39)$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} a_1 h_1 & a_2 h_2 & a_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho \theta_0 & k \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & r V_\varphi & V_z \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

II.6 Розв'язок деяких задач

1. Рух частинки в поліцентральної симетрії

Визначимо власні значення та власні функції, частинки, що рухається в центральносиметричному полі. Рух описується рівнянням Шредінгера:

$$\nabla^2 \Psi + \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) [E - E_\Pi(r)] \Psi = 0 \quad (2.41)$$

Потенціальна енергія E_Π в цьому випадку є функція відстані частин до центра сил.

Якщо перейти від декартових координат до сферичних, то рівняння

(2.41) розділяється. Як ми вже знаємо, оператор Лапласа ∇^2 в сферичних координатах має вигляд

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\nabla_{\theta, \varphi}^2}{r^2} \quad (2.42)$$

Де

$$\nabla_{\theta,\varphi}^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (2.43)$$

Підставляючи в рівняння (2.42) Шредінгера і $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ отримуємо

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 [E - E_{\text{п}}(r)] = -\frac{1}{Y} \nabla_{\theta,\varphi}^2 Y$$

Так як ліва і права частини цієї нерівності залежать від різних незалежних змінних, то ці частин поодельності повинні бути рівними одній і тій же постійній, яку ми позначили λ .

Таким чином, для радіальної функції $R(r)$ отримуємо рівняння

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_{\text{п}}(r)] - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad (2.45)$$

В рівняння (2.44) входить потенціальна енергія $E_{\text{п}}$. Тому вигляд радикальної функції і свої значення енергії визначаються конкретним видом поля, в якому рухається частинка. Рівняння (2.45) для всіх сферично-симетричних поліводнаково допускає подальше розділення змінних. Пропонуючи

$$Y(\theta, \varphi) = P(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \quad (2.46)$$

І позначаючи постійну роздільну μ^2 , для функції P, Φ знайдемо наступні рівняння

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} \right) P = 0 \quad (2.48)$$

Спільне рішення рівняння (2.47) має вигляд

$$\Phi(\varphi) = Ae^{i\mu\varphi} + Be^{-i\mu\varphi}.$$

З вимоги однозначності рішення випливає, що μ повинно бути будь-яким позитивним чи негативним цілим числом. Тому всі власні функції рівняння (2.47) можуть бути представлені формулою

$$\Phi_m = (2\pi)^{-1/2} e^{i\mu\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.49)$$

Переходячи в рівняння (2.48) до незалежної змінної $\xi = \cos\theta$, можна ці рівняння записати у вигляді

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dP}{d\xi} \right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] P = 0 \quad (2.50)$$

Функція $P(\cos\theta)$ повинна бути неперервною і визначеною при всіх кутах θ . Щоб удовотворити цій умові, параметр λ повинен бути рівний $\lambda = l(l + 1)$, де l – не від’ємне ціле число.

Розв’язок рівняння (2.50) при цьому може бути представлено як

$$P_l^m = \frac{1}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l, \quad (2.51)$$

Де P_l^m - функція Лагранджа.

Відмітимо, що при заданому l число m може приймати лише $2l + 1$ різних значень:

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (2.52)$$

Умова нормировка для функції Ψ

$$\int \Psi^* \Psi dx dy dz = 1$$

Зводиться до двох рівнянь:

$$\int_0^\infty R^* R r^2 dr = 1, \quad (2.53)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^* Y d\varphi = 1 \quad (2.54)$$

Запишемо свої значення функції рівняння (2.25) наступним чином:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m e^{i\mu\varphi} P_l^m(\cos\theta).$$

Використовуючи інтеграли

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{mm'},$$

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

Знаходимо

$$C_l^m = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2}.$$

Отже,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} e^{i\mu\varphi} \times P_l^m(\cos\theta). \quad (2.55).$$

2. Момент імпульсу .

Встановимо правила комутації для проекції оператора моменту імпульсу.

Вичислимо комутатор

$$[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = \widehat{L}_x \widehat{L}_y - \widehat{L}_y \widehat{L}_x = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \times \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \left(\frac{h}{i}\right)^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + zx \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - zy \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \right. \\ &+ \left. z^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} - x \frac{\partial}{\partial y} - xz \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\right) = \left(\frac{h}{i}\right)^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar \widehat{L}_z \quad (2.36a) \end{aligned}$$

Циклічною перестановкою індексів легко знайти інші два комутаційні співвідношення

$$\widehat{L}_y \widehat{L}_z - \widehat{L}_z \widehat{L}_y = i\hbar \widehat{L}_x, \quad (2.56 \text{ б})$$

$$\widehat{L}_z \widehat{L}_x - \widehat{L}_x \widehat{L}_z = i\hbar \widehat{L}_y, \quad (2.56 \text{ в})$$

Із некомутативності між собою

операторів проекції імпульса випливає, що різні проекції імпульса не можуть одночасно мати визначені значення.

Легко показати, що оператори $\widehat{L}_x, \widehat{L}_y, \widehat{L}_z$ комутують з оператором квадрата моменту імпульса

$$\begin{aligned} \widehat{L}^2 &= \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2 \\ \widehat{L}_x^2 \widehat{L}^2 - \widehat{L}^2 \widehat{L}_x^2 &= 0 \\ \widehat{L}_y^2 \widehat{L}^2 - \widehat{L}^2 \widehat{L}_y^2 &= 0 \\ \widehat{L}_z^2 \widehat{L}^2 - \widehat{L}^2 \widehat{L}_z^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Таким образом, будь-яка з проекцій імпульса і квадрат моменту імпульса може мати одночасно визначене значення. В *сферичній системі координат*

$$\widehat{L}_x = -\frac{h}{i} \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\widehat{L}_y = -\frac{h}{i} \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\widehat{L}_z = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\widehat{L}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2 \quad (2.58)$$

Де оператор $\nabla_{\theta, \varphi}^2$ визначається рівнянням (2.32).

На основі рівняння (2.25) з $\lambda = l(l+1)\hbar^2$ (2.49) випливає, що свої значення операторів \widehat{L}^2 і \widehat{L}_z рівне

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, \dots (2.59a)$$

$$L_z = \hbar m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l) \quad (2.59b)$$

Останні значення дають квантові значення модуля моменту

Імпульса і проекції моменту імпульса частинки на вісь z . Нагадаємо, що, якщо проекція L_z має певне значення, дві інші проекції L_x, L_y певних значень мати не можуть. В якості напрямку осі може бути вибрано будь-який напрямок. слід зазначити, що всі висновки про момент імпульсу руху та його проекції мають зовсім загальний характер і не залежать від того, в якому конкретному полі рухаються частинки. Ці висновки висловлюють квантово-механічні властивості моменту як фізичної величини.

3. Нескінченний круглий циліндр радіуса a рівномірно заряджений з об'ємною густиною ρ . Знайти потенціал і напруженість поля всередині і зовні циліндра

Спрямуємо вісь z вздовж осі циліндра. Тоді рівняння задачі записуються так:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{для } r \leq a); \quad d \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{для } r \geq a). \text{ Після інтегрування}$$

дістанемо: $\varphi^i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + c_1 \ln r + c_2$; $\varphi^e = c_3 \ln r + c_4$. Щоб φ залишилося

скінченним при $r = 0$, треба, щоб $c_1 = 0$. З умов неперервності $\frac{d\varphi}{dr}$ на поверхні

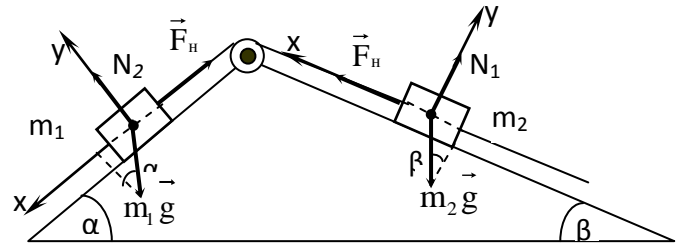
циліндра дістанемо: $c_3 = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$. Тому остаточно маємо:

$$\varphi^i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + c_2; \quad \varphi^e = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln r;$$

$$E^i = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r; \quad E^e = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}.$$

4.3 підводного човна запускається балістична ракета, наведена на місто яке

знаходиться на відстані l від човна. За який час ракета долетить до цілі, якщо її стартова швидкість v_0 .



$$\begin{aligned} v_0 & \quad v \\ \beta & \quad y_m \\ & \quad x \end{aligned}$$

Рух ракети є рівноприскорений, тому рівнянням руху є:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} \quad (2.60)$$

В проекціях Ox і Oy : $Ox: v_x = v_0 t \cos \beta$ (2.61)

$$Oy: v_y = v_0 t \sin \beta - \frac{g t^2}{2} \quad (2.62)$$

Швидкість ракети змінюється за формулою

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{g} t \quad (2.63)$$

В проекціях Ox і Oy : $Ox: v_x = v_0 \cos \beta$ (2.64)

$$Oy: v_y = v_0 \sin \beta - g t \quad (2.65)$$

5. Через невагомий блок, закріплений на ребрі призми, грані якої утворюють кути α та β з горизонтом, перекинута нитка, до якої прикріплені тіла масами m_1 та m_2 . Знайти прискорення тіл, силу натягу нитки. Тертям знехтувати.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного з тіл та спроектуємо їх на напрямки можливого руху (приймемо, що тіло m_1 опускається)

$$\begin{cases} m_1 &= m_1 g \sin \alpha - F_H \\ m_2 &= F_H - m_2 g \sin \beta \end{cases} \quad (2.66)$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2} g; \\ F_n &= \frac{m_1 m_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2} g. \end{aligned} \quad (2.67)$$

6. Визначити за допомогою потенціалу напруженості поля в точках перпендикуляра до площини диска, якщо на ньому рівномірно розподілений заряд q . Радіус диска a .

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2} \quad (2.68)$$

Для визначення цього інтеграла перейдемо до *полярної системи* координат в площині диска $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $dx dy = r dr d\alpha$

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{h^2 + a^2} - h) \quad (2.69)$$

Звідси випливає

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}\right) \quad (2.70).$$

ВИСНОВКИ

1. Вибір системи координат зумовлений симетрією конкретної задачі.
2. Кінематичні характеристики, зокрема, швидкість, прискорення та диференціальні оператори мають різний вигляд в різних системах координат.
3. Найбільш поширеною є прямокутна декартова система координат, що зумовлено незмінністю ортів цієї системи координат при описанні механічного руху.

Деякі результати дипломної роботи пройшли апробацію у Вигнанській ЗОШ I-II ступенів Любарського району.

Список використаної літератури

1. Араманович И.Г, Левин В.И Уравнения математической физики.- М., «Наука», 1964. – С.101 – 114.
2. Арсенин В.Я Математическая физика. – М., «Наука», 1966. – С.310.
3. Бугаєнко Г.О Методи математичної фізики. – Київ, «Вища школа», 1970.- С.76-94.
4. Джеффрис Г, Свирлс Б. Методы математической физики. – М., «Мир», 1969.- С.230.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.1,2.
6. Морс Ф, Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. – М., 1958 – 1960. – С.202-209.
7. Ненис Е. И Методы математической физики Учеб. Пособие для студентов физ.-мат.фак.пед.ин-тов. – М.,Просвещение, 1977.
8. Очан Ю. С Методы математической физики. – М., «Высшая школа», 1965. – С.83-104.
9. Тихонов А. Н, Самарский Д. А Уравнения математической физики. – М., Гостехиздат, 1966. – С.88 – 95.
10. Функции математической физики. Справочное руководство. – М., Физматгиз, 1963. – 168с.
11. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., «Мир», 1965. – С.56-80.
12. Шутц Б Геометрические методы математической физики.

